Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

Zadania na ćwiczenia

1. Wyznacz dziedziny naturalne funkcji:
   $(a)\ f(x,y)=x^2y^3-x\sin y$; $(b)\ f(x,y,z)=x^5y^{10}-x^3\ln z+y^2e^x$;
   $(c)\ f(x,y)=\frac{x^2\sin x+y^3-1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$; $(d)\ f(x,y)=\ln(4x+yx)$;
   $(e)\ f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$; $(f)\ f(x,y)=\sqrt{2x^2-y^2}$.

2. Na podstawie definicji oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji w punkcie $(0,0)$:
   $(a)\ f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0);\end{cases}$; $(b)\ f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$.

3. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji (z wykorzystaniem reguł różniczkowania):
   $(a)\ f(x,y)=x^2y^3-x\sin y$; $(b)\ f(x,y,z)=x^5y^{10}-x^3\sin z+y^2e^z$;
   $(c)\ f(x,y)=x^y$; $(d)\ f(x,y)=(\ln x)^{\sin y}$;
   $(e)\ f(x,y,z)=(2x+3z)^{yz}$; $(f)\ f(x,y,z)=xy^z$;
   $(g)\ f(x,y)=\ln\sin(x-2y)$; $(h)\ f(x,y)=ye^{x+xy}$;
   $(i)\ f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; $(j)\ f(x,y)=(x+y)\ln^2(1-x-y)$;
   $(k)\ f(x,y)=\frac{x\ln y}{5+2xy\ln x}$; $(l)\ f(x,y)=e^{3x}\operatorname{arctg}(xy)$.

4. Oblicz pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji:
   $(a)\ f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$; $(b)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;
   $(c)\ f(x,y)=\sin xy$; $(d)\ f(x,y)=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$;
   $(e)\ f(x,y,z)=e^{xyz}$; $(f)\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. Napisz różniczkę zupełną podanych funkcji:
   $(a)\ f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; w $(x_0,y_0)=(-4,3)$ $(b)\ f(x,y)=x\sin(x+z)+z\cos(x+y)$;

6. Napisz równanie płaszczyzny stycznej do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:
   $(a)\ f(x,y)=x^2+xy+y^2,\ P_0=(0,1,z_0)$; $(b)\ f(x,y)=\sin x+\cos(x+y),\ P_0=(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},z_0)$;
   $(c)\ f(x,y)=\frac{x^2}{2}-y^2,\ P_0=(2,-1,z_0)$; $(d)\ f(x,y)=y\ln(2+x^2y-y^2),\ P_0=(2,1,z_0)$.

7. Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:
   $(a)\ 1,07^{3,97}$; $(b)\ \sqrt{1,04^2+3,01^2}$;
   $(c)\ \operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95}$; $(d)\ \ln(0,09^3+0,99^3)$;
   $(e)\ \sin 29^o\cdot\sin 46^o$, zakładając, że $\pi=3.142$; $(f)\ \frac{1,03^2}{\sqrt[3]{098\cdot\sqrt[4]{1,05^3}}}$.

8. Oblicz gradient podanej funkcji w podanym punkcie:
   $(a)\ f(x,y)=5x^2y-3xy^3+y^4,\ (x_0,y_0)=(1,2)$;
   $(b)\ f(x,y)=\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\ (x_0,y_0)=(3,4)$;
   $(c)\ f(x,y,z)=\frac{xy^3}{z^2}\ (x_0,y_0,z_0)=(-2,1,3)$.

9. Oblicz pochodną kierunkową podanej funkcji w punkcie (x_0, y_0) i określonym kierunku (gdzie α to kąt jaki tworzy wektor $\vec{v}$ z osią Ox):
   (a) $f(x,y) = y^2 + \ln(xy)$, $\quad (x_0, y_0) = (2,1)$, $\quad \vec{v} = [1,1]$
   (b) $f(x,y) = x^2y$, $\quad (x_0, y_0) = (5,1)$, w kierunku punktu $(x_1, y_1) = (-1,-2)$;
   (c) $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$, $\quad (x_0, y_0) = (1,1)$, $\quad \alpha = 45^o$;
   (d) $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^3$, $\quad (x_0, y_0) = (1,2)$, $\quad \alpha = 135^o$;
   (e) $f(x,y) = xy$, $\quad (x_0, y_0) = (1,1)$, w kierunku wektora najszybszego wzrostu.

10. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji dwóch zmiennych:
   (a) $f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3$;
   (b) $f(x,y) = x^4 + 4xy + 2y^2$;
   (c) $f(x,y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$;
   (d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
   (e) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;
   (f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8x^2 - 2y^2 - 2$.

Informacje pomocnicze

Definicja 1. *Niech funkcja $f(x,y)$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0,y_0). Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych względem zmiennej x w punkcie (x_0,y_0) określamy wzorem:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych względem zmiennej y w punkcie (x_0,y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ posiada pochodne cząstkowe w każdym punkcie zbioru otwartego D to funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f w zbiorze D.

Uwaga 2. *Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ jest pochodną funkcji $f(x,y)$, gdzie zmienna y traktowana jest jako stała. Analogicznie można interpretować pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{d\,x}\left[f(x,y)|_{y=const.})\right];$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{d\,y}\left[f(x,y)|_{x=const.})\right].$$

Zatem obliczanie pochodnych cząstkowych można wykonywać z wykorzystaniem znanych reguł różniczkowania. Pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem x (symbol $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lub $f_x(x,y)$) należy uważać y za stała, a przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem y (symbol $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ lub $f_y(x,y)$) należy uważać x za stała.

Definicja 3. *(różniczkowalność funkcji w punkcie)*
Niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Wówczas mówimy, że funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0,y_0), gdy:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Definicja 4. *(różniczka funkcji trzech zmiennych)*
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0,y_0,z_0). Różniczką funkcji f w punkcie (x_0,y_0,z_0) nazywamy wyrażenie:

$$df(x_0,y_0,z_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0). \tag{1}$$

Fakt 5. *(zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych) Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0,y_0,z_0). Wówczas $\Delta f \approx df$ co oznacza :*

$$f(x,y,z) \approx f(x_0,y_0,z_0) + df(x_0,y_0,z_0). \tag{2}$$

Fakt 6. *(równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji)*
Niech funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Wówczas dowolny wektor normalny płaszczyzny stycznej do funkcji f w punkcie (x_0, y_0) jest postaci $\vec{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right]$, a równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) wyraża się wzorem:

$$-(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Definicja 7. *Pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ oznaczamy symbolami $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nazywamy pochodne cząstkowe jej pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ tzn.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Używamy następujących oznaczeń: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$.

Definicja 8. *(pochodna kierunkowa)*
Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Wówczas pochodną kierunkową funkcji f w kierunku wektora jednostkowego(wersora) $\vec{[v]} = [v_1, v_2]$ określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Definicja 9. *Gradientem funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor:*

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right].$$

Twierdzenie 10. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \circ \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_2.$$

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \circ [\cos\alpha, \cos\beta] = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cos\beta,$$

gdzie α, β to kąty jakie tworzy wektor $\vec{v}$ kolejno z osiami Ox i Oy. Ponadto $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, więc $\cos\beta = \sin\alpha$.

W podobny sposób definiujemy gradient i pochodną kierunkową funkcji trzech zmiennych.

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Definicja 12. *Mówimy, że funkcja z=f(x,y) posiada w punkcie (x_0, y_0) maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje otoczenie O punktu (x_0, y_0) takie, że dla każdego punktu $(x, y) \in O$ spełniona jest nierówność :*

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \qquad \Big(f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\Big). \tag{4}$$

Tak jak w rachunku funkcji jednej zmiennej minima i maksima lokalne funkcji dwóch zmiennych nazywamy ekstremami lokalnymi.

Twierdzenie 13. *(warunek konieczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne oraz w punkcie tym istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ to obie w tym punkcie są równe zeru, tzn. zachodzi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{5}$$

Twierdzenie 14. *Niech wyznacznik pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji f, w punkcie (x_0, y_0) tzw. wyznacznik Hessa (hesjan), oznaczymy przez $= \Delta_2$:*

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ posiada pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w tym punkcie są równe zeru

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Wówczas:

a) jeśli $\Delta_2 > 0$ oraz $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja f ma **właściwe minimum lokalne***;*

b) jeśli $\Delta_2 > 0$ oraz $\Delta_1 < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja f ma **właściwe maksimum lokalne***;*

c) jeżeli $\Delta_2 < 0$, to w punkcie(x_0, y_0) funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.

d) jeżeli $\Delta_2 = 0$ to badanie istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) przeprowadzamy innymi metodami.

Algorytm wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji dwóch zmiennych:

1. wyznaczamy dziedzinę funkcji f;
2. obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu;
3. wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f, tzn. rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$
   oznaczmy je przez $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ -wybieramy tylko te które należą do dziedziny;
4. w każdym z punktów krytycznych obliczamy Hesjan Δ_2 oraz wartość Δ_1;
5. sprawdzamy, który z punktów $a) - d)$ Twierdzenia 14 zachodzi.